PART2　共線条件

2 (1) 3 点 A$(-1,\ -1,\ -1)$, B$(1,\ 2,\ 3)$, C$(x,\ y,\ 1)$ が一直線上にあるとき，x, y の値を求めよ。

(2) 四面体 ABCD において，△BCD の重心を G とする。ある実数 k について，$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は，2 点 A，G を通る直線上にあることを証明せよ。

Point Pickup

3 点 A，B，P が一直線上にある $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する

第13講　PART2　確認問題

1　3 点 $\mathrm{A}(3,\ -1,\ 2)$，$\mathrm{B}(x,\ -3,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ y,\ 4)$ が一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ。

$x=$ [ア]，$y=$ [イ]

2 四面体ABCDにおいて，△BCDの重心をGとする。ある実数 k について，$k\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CD}$ を満たす点Pは，2点A，Gを通る直線上にあることを証明せよ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

(証明)

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdots\cdots(*)$$

$k\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CD}$ より

$$\left(\boxed{オ}-k\right)\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdots\cdots(**)$$

$k=\boxed{オ}$ のとき　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\boxed{カ}$

このとき(*)より，$\overrightarrow{AG}=\boxed{カ}$ であるから不適。

よって　$k\neq\boxed{オ}$

(**)より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{\boxed{オ}-k}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdots\cdots(***)$$

(*)，(***)より　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{オ}-k}\overrightarrow{AG}$

ゆえに，3点A，G，Pは一直線上にある。

したがって，点Pは，2点A，Gを通る直線上にある。

[$\boxed{カ}$ の選択肢]

①　$\vec{0}$　　②　$\overrightarrow{AP}$　　③　$\overrightarrow{GP}$

[MEMO]

PART2　共線条件

2　(1)　3 点 A$(-1,\ -1,\ -1)$，B$(1,\ 2,\ 3)$，C$(x,\ y,\ 1)$ が一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ。

(2)　四面体 ABCD において，△BCD の重心を G とする。ある実数 k について，$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は，2 点 A，G を通る直線上にあることを証明せよ。

(1)　3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 3,\ 4),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x+1,\ y+1,\ 2)$$

であるから　$(x+1,\ y+1,\ 2)=k(2,\ 3,\ 4)$　より

$$x+1=2k,\ y+1=3k,\ 2=4k$$

よって　$k=\dfrac{1}{2}$　　したがって　$x=0,\ y=\dfrac{1}{2}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ …… ①

$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ より

$$-k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

$$(3-k)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ \cdots\cdots ②$$

$k=3$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}$

このとき①より　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{0}$ であるから 不適

よって　$k\neq 3$

このとき②より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3-k}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ …… ③

①，③より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{3-k}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

ゆえに，3 点 A，G，P は一直線上にある。

したがって，点 P は 2 点 A，G を通る直線上にある。

第13講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：5，イ：3

[解説]

3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する。【A】

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x-3,\ -2,\ -1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-4,\ y+1,\ 2)$$

であるから，

$$(-4,\ y+1,\ 2)=k(x-3,\ -2,\ -1)$$

より

$$-4=k(x-3),\ y+1=-2k,\ 2=-k$$

よって　$k=-2$

したがって　$\boldsymbol{x=5,\ y=3}$

[A]　2 点 A，B が異なるとき
3 点 A，B，P が一直線上にある
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する

2 **[正解]** ウ：1，エ：3，オ：3，カ：①，キ：3

[解説]

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\ \cdots\cdots(*)$$

$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より

$$-k\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})+(\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})=\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$(3-k)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ \cdots\cdots(**)$$

$k=3$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}$

このとき(＊)より，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{0}$ であるから不適。

よって　$k\neq 3$

(＊＊)より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{3-k}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\ \cdots\cdots(***)$$

(＊)，(＊＊＊)より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{3-k}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ [A]

ゆえに，3点A，G，Pは一直線上にある。

したがって，点Pは，2点A，Gを通る直線上にある。